

Filtri RC: formulario con esempi

Riassunto delle formule usate nel Laboratorio filtri RC. Ogni sezione ha un esempio svolto con gli stessi valori degli esempi pronti della web app, così puoi controllare i risultati sullo schermo.

Grandezze e unità di misura

Grandezza	Simbolo	Unità	Valori tipici nei filtri
Resistenza	R	ohm (Ω)	1 k Ω = $10^3 \Omega$, 1 M Ω = $10^6 \Omega$
Capacità	C	farad (F)	1 μ F = 10^{-6} F, 1 nF = 10^{-9} F, 1 pF = 10^{-12} F
Frequenza	f	hertz (Hz)	1 kHz = 1000 Hz
Pulsazione	$\omega = 2\pi f$	rad/s	1 kHz corrisponde a $\omega \approx 6283$ rad/s
Guadagno	H, G	numero puro, dB	$H = V_{out}/V_{in}$, G in decibel

1. Frequenza di taglio

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad R = \frac{1}{2\pi f_c C} \quad C = \frac{1}{2\pi f_c R}$$

È la frequenza che separa ciò che passa da ciò che viene attenuato. Alla frequenza di taglio l'uscita vale $1/\sqrt{2} \approx 0,707$ volte l'ingresso, cioè -3 dB, ed è sfasata di 45° . Il prodotto RC si chiama costante di tempo τ e si misura in secondi.

Esempio · calcolare f_c (R = 4,7 k Ω , C = 100 nF)

$$f_c = \frac{1}{2\pi \cdot 4700 \cdot 100 \cdot 10^{-9}} = \frac{1}{0,002953} \approx 339 \text{ Hz}$$

Esempio · progettare: voglio $f_c = 1$ kHz con C = 100 nF

$$R = \frac{1}{2\pi \cdot 1000 \cdot 100 \cdot 10^{-9}} \approx 1592 \Omega$$

Il valore commerciale più vicino (serie E12) è 1,5 k Ω , che dà $f_c \approx 1061$ Hz.

2. Guadagno in decibel

$$G_{dB} = 20 \log_{10} \frac{V_{out}}{V_{in}} \quad \frac{V_{out}}{V_{in}} = 10^{G_{dB}/20}$$

I decibel trasformano le moltiplicazioni in somme: attraversare due blocchi in fila significa sommare i loro guadagni in dB. Un valore negativo indica un'attenuazione.

G (dB)	0	-3	-6	-10	-20	-40	-60
V_{out}/V_{in}	1	0,707	0,5	0,316	0,1	0,01	0,001

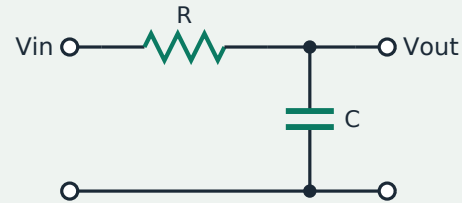
Esempio · $V_{in} = 2 \text{ V}$, $V_{out} = 0,5 \text{ V}$

$$G = 20 \log_{10} \frac{0,5}{2} = 20 \log_{10} 0,25 \approx -12 \text{ dB}$$

3. Filtro passa basso (R in serie, C verso massa)

$$H(f) = \frac{1}{1 + jf/f_c}$$

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}} \quad \varphi = -\arctan \frac{f}{f_c}$$



Sotto f_c il condensatore si comporta quasi come un circuito aperto e il segnale passa. Sopra f_c il condensatore "cortocircuita" verso massa le frequenze alte: per $f \gg f_c$ vale $|H| \approx f_c/f$, cioè -20 dB ogni volta che la frequenza si moltiplica per 10 (-20 dB/decade , circa -6 dB/ottava). Lo sfasamento va da 0° a -90° .

Esempio · $f_c = 339 \text{ Hz}$, disturbo a $f = 1760 \text{ Hz}$

$$\frac{f}{f_c} = \frac{1760}{339} \approx 5,20 \quad |H| = \frac{1}{\sqrt{1 + 5,20^2}} \approx 0,189$$

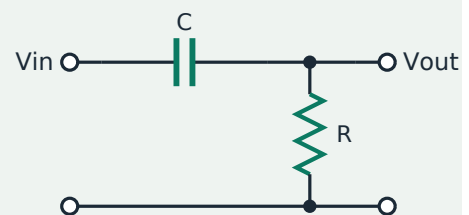
$$G = 20 \log_{10} 0,189 \approx -14,5 \text{ dB} \quad \varphi = -\arctan 5,20 \approx -79^\circ$$

Un disturbo di $0,4 \text{ V}$ esce con un'ampiezza di circa $0,4 \cdot 0,189 \approx 0,076 \text{ V}$.

4. Filtro passa alto (C in serie, R verso massa)

$$H(f) = \frac{jf/f_c}{1 + jf/f_c}$$

$$|H| = \frac{f/f_c}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}} \quad \varphi = 90^\circ - \arctan \frac{f}{f_c}$$



È il comportamento opposto: il condensatore in serie blocca le frequenze basse (e la tensione continua) e lascia passare quelle alte. Per $f \ll f_c$ vale $|H| \approx f/f_c$: $+20 \text{ dB/decade}$ salendo verso il taglio. Lo sfasamento va da $+90^\circ$ a 0° .

Esempio · $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 47 \text{ nF}$ ($f_c \approx 339 \text{ Hz}$), ronzio a $f = 50 \text{ Hz}$

$$\frac{f}{f_c} = \frac{50}{339} \approx 0,148 \quad |H| = \frac{0,148}{\sqrt{1 + 0,148^2}} \approx 0,146$$

$$G \approx -16,7 \text{ dB} \quad \varphi = 90^\circ - \arctan 0,148 \approx +82^\circ$$

5. Celle uguali in cascata (separate da buffer)

$$|H_{\text{tot}}| = |H|^n \quad G_{\text{tot}} = n \cdot G \quad \text{pendenza} = -20n \text{ dB/decade}$$

$$f_{-3\text{dB}} = f_c \sqrt{2^{1/n} - 1} \quad (\text{passa basso}) \quad f_{-3\text{dB}} = \frac{f_c}{\sqrt{2^{1/n} - 1}} \quad (\text{passa alto})$$

Il buffer (inseguitore di tensione, guadagno $\times 1$) copia la tensione senza assorbire corrente, così ogni cella lavora come se fosse da sola e i guadagni si moltiplicano. Più celle tagliano i disturbi in modo più netto, ma il taglio a -3 dB si sposta e anche il segnale utile perde un po' di più.

Esempio · 3 celle passa basso con $f_c = 339$ Hz, disturbo a 1760 Hz

$$|H_{\text{tot}}| = 0,189^3 \approx 0,0067 \quad G_{\text{tot}} = 3 \cdot (-14,5) \approx -43,4 \text{ dB}$$

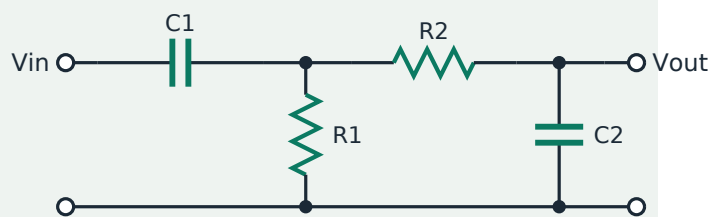
$$f_{-3\text{dB}} = 339 \cdot \sqrt{2^{1/3} - 1} \approx 339 \cdot 0,510 \approx 173 \text{ Hz}$$

6. Filtro passa banda (passa alto seguito da passa basso)

$$f_L = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} \quad f_H = \frac{1}{2\pi R_2 C_2}$$

$$f_0 = \sqrt{f_L f_H} \quad B = f_H - f_L$$

$$|H| = |H_{\text{HP}}| \cdot |H_{\text{LP}}| \quad (\text{con buffer})$$



Passano le frequenze comprese tra f_L (taglio inferiore) e f_H (taglio superiore); serve $f_L < f_H$. f_0 è la frequenza centrale, dove il guadagno è massimo, e B è la larghezza di banda. Senza buffer la seconda cella "carica" la prima: il guadagno massimo scende un po' sotto 0 dB e i tagli si spostano. L'effetto diventa trascurabile se $R_2 \geq 10 \cdot R_1$.

Esempio · $R_1 = 3,3 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 220 \text{ nF}$, $R_2 = 33 \text{ k}\Omega$, $C_2 = 2,2 \text{ nF}$

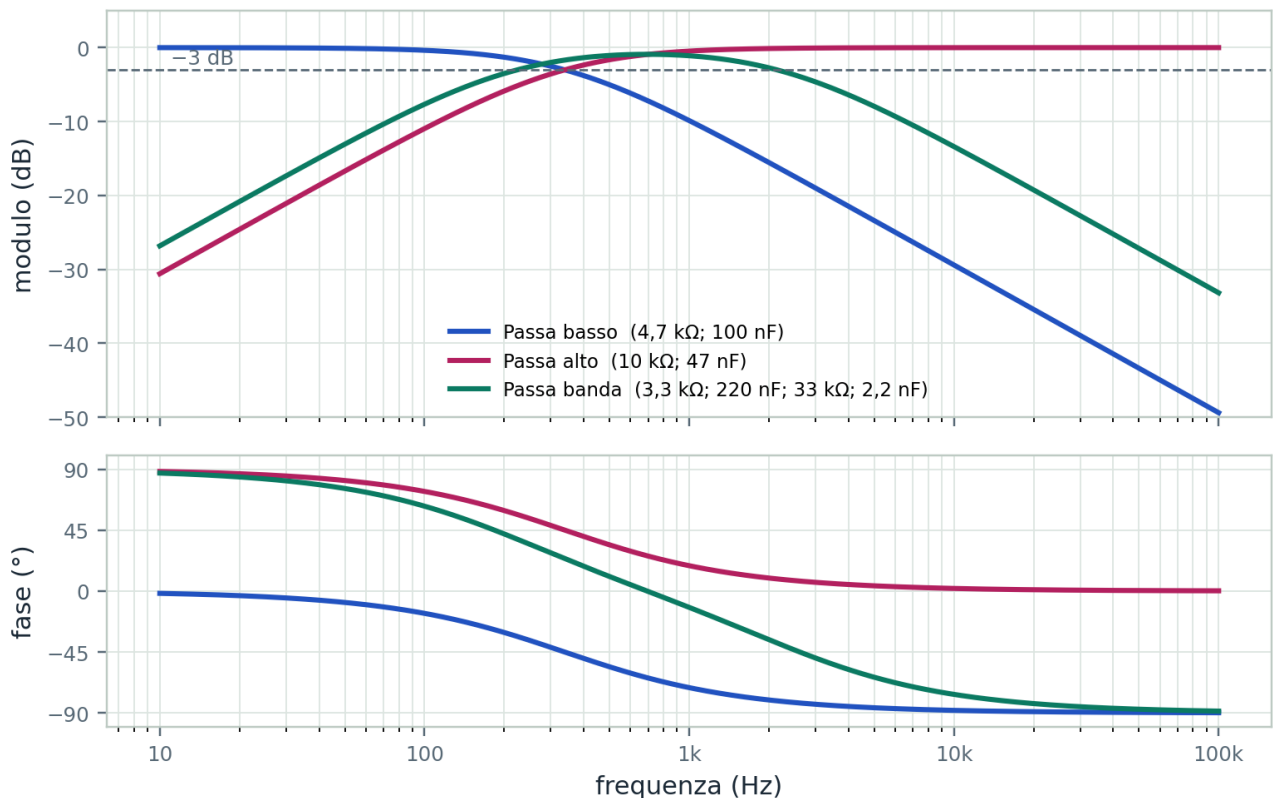
$$f_L = \frac{1}{2\pi \cdot 3300 \cdot 220 \cdot 10^{-9}} \approx 219 \text{ Hz} \quad f_H = \frac{1}{2\pi \cdot 33000 \cdot 2,2 \cdot 10^{-9}} \approx 2192 \text{ Hz}$$

$$f_0 = \sqrt{219 \cdot 2192} \approx 693 \text{ Hz} \quad B = 2192 - 219 \approx 1973 \text{ Hz}$$

$$\text{a } 1 \text{ kHz: } |H| \approx 0,977 \cdot 0,910 \approx 0,889 \Rightarrow G \approx -1,0 \text{ dB}$$

7. Diagrammi di Bode degli esempi

Asse delle frequenze logaritmico: ogni tacca principale è dieci volte la precedente. Le rette oblique lontano dal taglio hanno pendenza 20 dB/decade per ogni cella.



8. Quale filtro scegliere

Dove sono i disturbi	Filtro	Come scegliere la frequenza di taglio
Sopra il segnale utile (fruscio, armoniche acute)	Passa basso	f_c sopra il segnale utile e sotto il primo disturbo
Sotto il segnale utile (ronzio di rete a 50 Hz)	Passa alto	f_c sopra il disturbo e sotto il segnale utile
Sia sotto sia sopra	Passa banda	f_L e f_H ai lati del segnale utile, con f_0 vicino a esso
Molto vicini al segnale utile	Più celle in cascata	Con n celle la pendenza diventa $20 \cdot n$ dB/decade